

## Étude de cas 2°

Théorie des ensembles générale,  
fonctions, collectionsDérivée de la fonction réciproque d'une fonction dérivable<sup>1</sup>

27 avril 2004 : théorie des ensembles générale, fonctions

4 mai 2004 : fonctions, collections

## Preuve « mathématique »

Montrons que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  strictement monotone,  $f$  dérivable en  $x_0 \in ]a, b[$ ,  $f'(x_0) \neq 0$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ , dérivable en  $y_0 = f(x_0)$ ,  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ ,  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ .

– On a  $f^{-1} \circ f = \text{id}$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in ]a, b[$$

– en dérivant par rapport à  $x$  en  $x_0$  :

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

## Avertissement

La présente étude de cas n'a pas la prétention de remplacer les parties correspondantes d'un cours d'analyse. Notamment, nous ne pouvons entrer ici dans le détail de la définition de la dérivabilité d'une fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  ( $S \subseteq \mathbb{R}$ ) en un point  $x$ . Cette définition contient généralement des conditions particulières sur la forme de  $S$  (par exemple que  $S$  est un intervalle non réduit à un seul point) ou sur la position de  $x$  par rapport à  $S$  (par exemple que  $x$  est un point intérieur à  $S$ ). Pour ne pas avoir à entrer dans ces « détails », nous admettons que la proposition «  $f$  est dérivable en  $x$  » implique toujours que ces conditions sont satisfaites. Cette convention s'applique notamment à notre énoncé du théorème de dérivation d'une fonction composée.

<sup>1</sup>preuve « mathématique » tirée du cours Analyse I, EPFL, 2003 et fournie par Philippe Suter

## Preuve formelle

1	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})\forall(c \in \mathbb{R})((a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c)$	ax
2	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a < b \vee a = b \vee b < a)$	ax
3	$\forall(a \in \mathbb{R})(a \not< a)$	ax
4	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x < b\})$	ax déf
5	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})\forall(f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R})\forall(S \subseteq [a, b])(f \text{ est s.c. sur } S \Leftrightarrow \forall(x \in S)\forall(y \in S)(x < y \Rightarrow f @ x < f @ y))$	ax déf
6	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})\forall(f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R})\forall(S \subseteq [a, b])(f \text{ est s.d. sur } S \Leftrightarrow \forall(x \in S)\forall(y \in S)(x < y \Rightarrow f @ y < f @ x))$	ax déf
7	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})\forall(f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R})\forall(S \subseteq [a, b])(f \text{ est s.m. sur } S \Leftrightarrow (f \text{ est s.c. sur } S \vee f \text{ est s.d. sur } S))$	ax déf
8	$\forall(S \subseteq \mathbb{R})\forall(S' \subseteq \mathbb{R})\forall(f : S \rightarrow S')\forall(g : S' \rightarrow \mathbb{R})\forall(x \in S)$ $(f \text{ est dér. en } x \wedge g \text{ est dér. en } f @ x) \Rightarrow$ $(g \circ f \text{ est dér. en } x \wedge (g \circ f)' @ x = (g' @ (f @ x)) \cdot (f' @ x))$	théor
9	$\forall f(f \text{ est une fonct. inject.} \Rightarrow f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom} f})$	lem 1
10	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a)$	lem 2
11	$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \wedge f \text{ est s.m. sur } [a, b] \wedge x_0 \in ]a, b[ \wedge$ $f \text{ est dér. en } x_0 \wedge f^{-1} \text{ est dér. en } f @ x_0 \wedge f' @ x_0 \neq 0$	hyp
12	$y_0 = f @ x_0$	hyp
13	$x \in \text{Dom} f \wedge y \in \text{Dom} f \wedge x \neq y$	hyp
14	$x < y \vee y < x$	13, 10
n	$f @ x \neq f @ y$	
n+1	$(x \in \text{Dom} f \wedge y \in \text{Dom} f \wedge x \neq y) \Rightarrow f @ x \neq f @ y$	13, n
n+2	$\forall x \forall y ((x \in \text{Dom} f \wedge y \in \text{Dom} f \wedge x \neq y) \Rightarrow f @ x \neq f @ y)$	n+1
n+3	$f \text{ est une fonct. inject.}$	n+2
n+4	$f^{-1} \text{ est une fonct.}$	n+3
n+5	$f^{-1} \circ f = \text{Id}_{[a, b]}$	n+3, 9
n+6	$\forall(x \in [a, b])(f^{-1} @ (f @ x) = x)$	n+5
n+7	$f^{-1} @ (f @ x_0) = x_0$	n+6
n+8	$f^{-1} @ (f @ x_0) = x_0 \Rightarrow ((f^{-1})' @ (f @ x_0)) \cdot (f' @ x_0) = 1$ $\Leftrightarrow ((f^{-1})' @ y_0) \cdot (f' @ x_0) = 1$ $\Leftrightarrow (f^{-1})' @ y_0 = \frac{1}{f' @ x_0}$	n+7, 11, 8 12 11
n+9	$(f^{-1})' @ y_0 = \frac{1}{f' @ x_0}$	n+7, n+8
n+10	$f^{-1} \text{ est une fonct.} \wedge (f^{-1})' @ y_0 = \frac{1}{f' @ x_0}$	n+4, n+9

## Commentaires

- le symbole \_\_\_\_\_ <  
désigne un ordre total strict
- est s.c. sur \_\_\_\_\_  
qui abrège « est strictement croissant sur »
- est s.d. sur \_\_\_\_\_  
qui abrège « est strictement décroissant sur »
- est s.m. sur \_\_\_\_\_  
qui abrège « est strictement monotone sur »
- est dér. en \_\_\_\_\_  
qui abrège « est dérivable en »
- le symbole \_\_\_\_\_ ,  
désigne l'opération de différentiation

## Lemme (1)

8.1	$\forall x \forall y ((x, y) \in f^{-1} \circ f \Leftrightarrow x \in \text{Dom} f \wedge y \in \text{Dom} f \wedge f @ x = f @ y)$	lem 1.1
8.2	$f$ est une fonct. inject.	hyp
8.3	$(x, y) \in f^{-1} \circ f$	hyp
8.4	$(x, y) \in f^{-1} \circ f \Leftrightarrow x \in \text{Dom} f \wedge y \in \text{Dom} f \wedge f @ x = f @ y$	8.1
8.5	$x \in \text{Dom} f \wedge y \in \text{Dom} f \wedge f @ x = f @ y$	8.3, 8.4
8.6	$(x \in \text{Dom} f \wedge y \in \text{Dom} f \wedge f @ x = f @ y) \Rightarrow x = y$	8.2
8.7	$x = y$	8.5, 8.6
8.8	$x \in \text{Dom} f \wedge x = y$	8.5, 8.7
8.9	$(x, y) \in \text{Id}_{\text{Dom} f}$	8.8
8.10	$(x, y) \in \text{Id}_{\text{Dom} f}$	hyp
8.11	$x \in \text{Dom} f \wedge x = y$	8.10
8.12	$x \in \text{Dom} f \wedge x \in \text{Dom} f \wedge f @ x = f @ x$	8.11
8.13	$x \in \text{Dom} f \wedge y \in \text{Dom} f \wedge f @ x = f @ y$	8.11, 8.12
8.14	$(x, y) \in f^{-1} \circ f \Leftrightarrow x \in \text{Dom} f \wedge y \in \text{Dom} f \wedge f @ x = f @ y$	8.1
8.15	$(x, y) \in f^{-1} \circ f$	8.13, 8.14
8.16	$f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom} f}$	8.3, 8.10
8.17	$f$ est une fonct. inject. $\Rightarrow f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom} f}$	8.2, 8.16
9	$\forall f (f \text{ est une fonct. inject. } \Rightarrow f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom} f})$	8.17

**Lemme (2)**

9.1	$a \in \mathbb{R}$	hyp
9.2	$b \in \mathbb{R}$	hyp
9.3	$a \neq b$	hyp
9.4	...	
9.5	$a < b \vee b < a$	
9.6	$a < b \vee b < a$	hyp
9.7	$a < b$	hyp
9.8	...	hyp
9.9	...	
9.10	...	
9.11	...	
9.12	$a \neq b$	
9.13	$b < a$	hyp
9.14	...	hyp
9.15	...	
9.16	...	
9.17	...	
9.18	$a \neq b$	
9.19	$a \neq b$	
9.20	$a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a$	
9.21	$b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a)$	
9.22	$\forall (b \in \mathbb{R})(a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a)$	
9.23	$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall (b \in \mathbb{R})(a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a)$	
10	$\forall (a \in \mathbb{R})\forall (b \in \mathbb{R})(a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a)$	

**Lemme (1.1)**

8.0.1	$(x, y) \in f^{-1} \circ f$
	$\Leftrightarrow \exists z((x, z) \in f \wedge (z, y) \in f^{-1})$
	$\Leftrightarrow \exists z(x \in \text{Dom}f \wedge z = f @ x \wedge z \in \text{Dom}f^{-1} \wedge y = f^{-1} @ z)$
	$\Leftrightarrow x \in \text{Dom}f \wedge f @ x \in \text{Dom}f^{-1} \wedge y = f^{-1} @ (f @ x)$
	$\Leftrightarrow x \in \text{Dom}f \wedge (f @ x, y) \in f^{-1}$
	$\Leftrightarrow x \in \text{Dom}f \wedge (y, f @ x) \in f$
	$\Leftrightarrow x \in \text{Dom}f \wedge y \in \text{Dom}f \wedge f @ x = f @ y$
8.1	$\forall x \forall y((x, y) \in f^{-1} \circ f \Leftrightarrow x \in \text{Dom}f \wedge y \in \text{Dom}f \wedge f @ x = f @ y)$